A B S T R A K

Percampuran zat padat adalah suatu proses yang mana dua atau lebih partikel zat padat dikacaukan secara acak pada suatu alat pencampur, sehingga setiap partikel akan bergerak secara acak. Mengingat operasi ini banyak digunakan dalam industri, pertanian dan - proses pharmasi, maka perlu adanya usaha pengembangan kehomogenan suatu campuran zat padat sehingga akan didapatkan suatu perancangan alat yang seksama dengan kondisi operasi yang tepat.

Proses percampuran zat padat ini dilakukan dengan sebuah alat sederhana yaitu rotary drum yang digerakkan dengan suatu puli pada kecepatan 25 rpm, 38rpm dan 60 rpm, dengan kondisi perbandingan volume partikel zat padat dan volume rotary drum sendiri (V_p /V_d) sebesar 0,06 ; 0,09 ; 0,12 ; 0,15 ; 0,18 dan 0,21.

Tujuan penelitian ini untuk menganalisa kebenaran hipotesa campuran yang homogen pada suatu percampuran zat padat bila digunakan suatu peralatan rotary drum dengan suatu kondisi operasi yang tertentu.

Dengan menggunakan metoda analisa multivariate, antara lain uji kesamaan matrik kovarians dan dengan Manova pengelompokan dua arah bisa diketahui kehomogenan campuran zat padat adalah dicapai pada suatu - kondisi operasi kecepatan yang berkisar dari 25 rpm

sampai dengan 60 rpm, dan V_p / V_d yang berkisar dari 0,06 sampai dengan 0,21. Adapun range indeks percampuran yang dihasilkan dari campuran partikel zat padat tersebut adalah $0,5 < M_m < 0,8$.

BAB II

METODA ANALISA

Rotary drum silinder merupakan alat yang sering digunakan dalam satuan unit operasi, salah satu dari padanya adalah operasi pencampuran. Operasi pencampur an zat padat dalam rotary drum yang telah diketahui - adalah merupakan dispersi solid secara radial dan longitudinal, tetapi effek ini akan menjadi minimum - bila partikelnya mempunyai kecenderungan untuk mengha silkan campuran yang homogen.

Untuk mengetahui adanya suatu campuran yang homogen dalam penelitian ini digunakan metoda analisa - Multivariate, yaitu suatu metoda yang merupakan ga - bungan antara teknik-teknik Statistik dan Matematika untuk menganalisa suatu permasalahan dengan melakukan pengukuran berulang pada obyek yang sama.

2.1 Organisasi Data

Multivariate data adalah suatu analisa pengukur an yang dibuat pada beberapa variabel atau karakteris tik pengukuran, dibentuk dan ditunjukkan dalam bebera pa cara untuk membantu dalam analisa data.

Harga p variabel yang ada ($p > 1$) diletakkan pada ma - sing-masing bagian, individu yang berbeda.

Bila X_{ij} adalah menunjukkan pengamatan ke i dan variabel ke j, maka jika terdapat p variabel dan n pengamatan akan terbentuklah suatu organisasi data sebagai berikut :

	Variabel ke 1	Variabel ke 2	...	Variabel ke p
pengamatan ke 1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1p}
pengamatan ke 2	X_{2p}	X_{22}	...	X_{2p}
.	.			
.	.			
.	.			
pengamatan ke n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{np}

Dengan demikian dapat disusun empat persegi panjang X yang berisi semua pengamatan pada semua variabel :

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots\cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots\cdots & X_{2p} \\ \vdots & & & \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots X_{ij} \cdots & X_{ip} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots\cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

2.2 <u>Uji Kesamaan Matrik Kovarians</u>

Misal X adalah suatu random variabel yang kontinyu dengan density function yang tergantung pada para

meter θ_1, θ_2, ... θ_k dan sampel space W yang merupa kan hasil dari semua kemungkinan n_w observasi.
Bila terdapat vektor sampel pengamatan(X_1, ... X_{nw}) yang merupakan titik dari sampel space, dan terdapat 2 disjoint ω_1, ω_2 yang merupakan bagian dari parameter space Ω, maka dapat disusun suatu hipotesa parameter distribusi X :

H_0 : (θ_1, θ_2 ..... θ_k) berada pada ω_1

H_1 : (θ_1, θ_2 ..... θ_k) berada pada ω_2

Hipotesa H_0 diterima bila (X_1, X_2 .... X_{nw}) jatuh W-w

Hipotesa H_1 diterima bila (X_1, X_2 .... X_{nw}) jatuh pada w.

Dimana w adalah bagian dari sampel space yang disebut daerah kritis atau daerah penolakan hipotesa H_0.
Jika α adalah probabilitas bahwa sampel pengamatan jatuh pada daerah kritis w bila H_0 benar, maka :

$$\alpha = P\left[(X_1, X_2, \ldots X_{nw}) \in w \mid H_0 \text{ benar}\right] \quad \ldots(2.1)$$

sehingga bila β adalah probabilitas penerimaan hipotesa H_0 bila H_1 benar, maka :

$$\beta = P\left[(X_1, X_2, \ldots X_{nw}) \in W\text{-}w \mid H_1 \text{ benar}\right] \quad \ldots(2.2)$$

Hasil dari 1 - β itulah yang sering disebut sebagai power test.
Harga α dipilih sedemikian hingga meminimumkan atau memaksimalkan power test pada ukuran sampel yang tertentu.

Seandainya diketahui bahwa hipotesa H_0 dan alternatif hipotesa H_1 adalah merupakan hipotesa simpel sehingga daerah ω_1 dan ω_2 dari parameter space berbentuk titik maka :

$$H_0 : \theta_1 = \theta_{10} \qquad\qquad H_1 : \theta_1 = \theta_{11}$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_k = \theta_{ko} \qquad\qquad \theta_k = \theta_{k1}$$

Dan menurut teorema Neyman Pearson, hipotesa H_0 akan diterima bila :

$$\lambda = \frac{f(X_1;\theta_{10},\ldots,\theta_{ko}) \ldots f(X_N;\theta_{10}, \ldots \theta_{ko})}{f(X_1;\theta_{11},\ldots,\theta_{k1}) \ldots f(X_N;\theta_{11}, \ldots \theta_{k1})} > c$$

.... (2.3)

Dengan demikian hipotesa H_1 diterima jika $\lambda < c$.
C adalah suatu konstanta yang dipilih sedemikian rupa sehingga = $P(\lambda < c) = \alpha$ . ... (2.4)

Sekarang apabila hipotesa alternatif H_1 bukan - berbentuk simpel tetap merupakan hipotesa composite - yang memuat beberapa parameter, maka menurut teorema likelihood-Ratio :

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \qquad \text{........ (2.5)}$$

$$L(\hat{\omega}) = f(X_1 ; \theta_{10}, \ldots, \theta_{ko}) \ldots f(X_{nw}; \theta_{10},\ldots, \theta_{ko})$$

adalah fungsi maximum likelihood dari θ_1, θ_2, .. yang diijinkan untuk diambil dari seluruh harga parameter space Ω . Dengan demikian ω adalah subset dari Ω dan merupakan subspace yang diberikan oleh hipotesa H_0. Hipotesa H_0 diterima bila $\lambda > C$, dan hipotesa H_1 diterima bila :

$$H_1 = [(\theta_1, \ldots, \theta_k)] \in \Omega - \omega < C$$

C adalah suatu konstanta yang dipilih sedemikian hingga P ($\lambda < C \mid H_0$ benar).

Dari landasan teori di atas jika terdapat n - pengamatan dari p variabel multinormal populasi dengan mean vektor μ dan matrix kovarians semidefinite positif.

Estimasi maximum likelihood dari multinormal parameter dibawah hipotesa H_0 adalah $\bar{X}$ dan Σ_0, sedangkan general parameter space adalah $\bar{X}$ dan S.

Sehingga bila terdapat hipotesa H_0 : $\Sigma = \Sigma_0$

H_1 : $\Sigma \neq \Sigma_0$

maka menurut likelihood ratio :

$$\lambda = \left[\left(\frac{(n-1)}{n} \right)^p \frac{|S|}{|\Sigma_0|} \right]^{\frac{1}{2}n} \exp\left[-\tfrac{1}{2} (n-1)(\operatorname{tr} S \Sigma_0^{-1} - n_p) \right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

n-1 = V = adalah derajad bebas untuk S.

Statistik uji adalah :

$$L = V\left[(\ln|\Sigma_0| - \ln|S| + \operatorname{tr} S \Sigma_0^{-1} - p) \right] \ldots\ldots (2.7)$$

Untuk harga n yang sesuai Bartlett (1954) mengajukan penyusunan skala Statistik :

$$L^1 = \left\{1 - \frac{1}{6\ (n-1)}\ (2p + 1 - \frac{2}{(P + 1)}\ )\right\} L \quad \ldots(2.8)$$

Sehingga harga yang dikandung L^1 adalah lebih seksama Penolakan hipotesa H_0 bila :

$$L^1 > \chi^2_{\alpha,\ \frac{1}{2} p'(p+1)}$$

Kemudian bila sekarang terdapat multinormal p Variabel dan h matrik kovarians, maka hipotesa ho menjadi :

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots\ldots = \Sigma_h$$

S_m adalah Unbiased estimate dari Σ dengan V_m derajat bebas, $V_m = n_m - 1$ dan n_m adalah random sampel dari - populasi ke m.

Pool estimate dari matrik kovarians adalah :

$$S = \frac{1}{\sum_{m=1} V_m} \sum_{m=1}^{h} V_m S_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

Statistik Uji :

$$M = \sum_{m=1}^{h} V_m \ln |S| - \sum_{m=1}^{h} V_m \ln |S_m| \quad \ldots\ldots(2.10)$$

Oleh Box (1949) kemudian ditemukan faktor skala :

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6\ (p+1)\ (h-1)} \left(\sum_{m=1} \frac{1}{V_m} - \frac{1}{\sum_{m=1} V_m} \right) \quad \ldots\ldots(2.11)$$

Sehingga MC^{-1} dapat didekati dengan distribusi Chi - Square dengan derajat bebas $\frac{1}{2}$ (h-1) p (p+1).

Apabila harga $V_m = n_m - 1 = n$ maka :

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(h+1)}{6\ (p+1)\ h_n} \qquad \text{........ (2.12)}$$

Penolakan hipotesa Ho bila :

$$MC^{-1} > \chi^2_{\alpha}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ (h-1)\ p\ (p+1)$$

2.3 Multivariate Analysis Of Varians (MANOVA)

Kegunaan dari Manova antara lain untuk menyelidiki apakah vektor mean untuk semua group adalah sama Jika tidak, komponen vektor mean yang manakah yang - mempunyai perbedaan berarti ?

Untuk bisa menjawab dan menganalisa dari kedua pernyataan tersebut maka kita perlu mengetahui asumsi-asumsi yang berhubungan dengan susunan data terlebih dahulu.

2.3.1 Asumsi-Asumsi Yang Behubungan Dengan Susunan Data

Bila terdapat 2 group atau lebih yang - ingin dibandingkan, dan dari masing-masing group dipilih random sampel sebesar n_e, sehingga susunan data akan berbentuk :

Group ke 1 : X_{11} , X_{12} , ... X_{1n_1}

Group ke 2 : X_{21} , X_{22} , ... X_{2n_2}

.

.

.

Group ke g : X_{g1} , X_{g2} , ... X_{gn_g}

dimana :

$l = 1, 2, \ldots\ldots g$

Dari susunan data di atas maka X_{l1}, X_{l2}, ... X_{ln_l} adalah random sampel berukuran n_l dari group ke l dan mempunyai mean μ_l, $l = 1,2, \ldots\ldots g$.

Sehingga asumsi-asumsi yang diperlukan adalah :

- Bahwa random sampel dari group yang berbeda - adalah independent.
- Semua group mempunyai matrix kovarians yang sama.
- Masing-masing group adalah multivariate normal

2.3.2 Model Multivariate Analysis Of Variance (MANOVA)

Metoda analisis yang dipakai dalam penelitian ini sebenarnya adalah Manova dengan pengelompokan 2 arah. Tetapi ada baiknya jika kita membahas sedikit tentang manova dengan pengelompokan 1 arah.

- Manova Dengan Pengelompokan Satu Arah (The One Way Classification)

Bila terdapat 1 set k treatment yang tertentu.

Kondisi percobaan atau pengelompokan diagnosa adalah berdasarkan dari hasil analisa yang diinginkan.

Keberadaan masing-masing treatment pada masing masing p variabel adalah merupakan sampling - unit. Sedangkan satu kesatuan group adalah didasarkan pada kondisi satu set percobaan yang berbeda.

Pada analisa pengelompokan satu arah Multivariate, masing-masing komponen dari pengamatan vektor X_{lj} sesuai dengan model analisa pengelompokan satu arah Univariate dan berbentuk :

$$X_{lj} = \mu + \tau_l + e_{lj} \quad \ldots\ldots (2.13)$$

$$l = 1, 2, \ldots\ldots g$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots n_l$$

Dimana :

μ = mean keseluruhan

τ_l = effek dari treatment

e_{lj} = Error yang identik, independen dan berdistribusi normal $N(0, \Sigma)$

$l = 1, 2, \ldots\ldots g$.

Penguraian hasil pengamatan yang sesuai dengan persamaan (2.13)

$$X_{lj} = \bar{X} + (\bar{X}_l - \bar{X}) + (X_{lj} - \bar{X}_l)$$

Dimana :

X_{lj} = adalah nilai pengamatan

$\bar{X}$ = adalah rata-rata keseluruhan dari sampel

$(\bar{X}_l - \bar{X})$ = adalah nilai estimate dari effek treatment

$(X_{lj} - \bar{X}_l)$= adalah residual

Pengujian hipotesa :

H_0 = $\tau_1 = \tau_2 = \ldots\ldots = \tau_g = 0$

H_1 = Tidak semua treatment $\tau_l = 0, l = 1,2,\ldots\ldots g$.

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|W|}{|B+W|}$$

B = adalah matrik sum of square dan cross product dari treatment

$$\sum_{l=1}^{g} n_l (\bar{X}_l - \bar{X})(\bar{X}_l - \bar{X}) \quad \ldots\ldots\ (2.14)$$

W = adalah matrik sum of square dan cross product dari residual

$$\sum_{l=1}^{g} \sum_{j=1}^{n_l} (X_{lj} - \bar{X})(X_{lj} - \bar{X})' \quad \ldots\ (2.15)$$

Daerah Penolakan :

$\Lambda^* >$ distribusi Λ^* yang sesuai

Harga dari distribusi Λ^* yang seksama untuk beberapa kasus yang khusus dapat diterangkan pada tabel dibawah ini :

Tabel (2.1) Distribusi Wilk's Lambda, $\Lambda^* = \frac{|W|}{|B+W|}$

Jumlah Variabel	Jumlah Group	Sampling Distribusi Untuk Data Multivariate Normal
$p = 1$	$g \geq 2$	$\left(\frac{n_t - g}{g - 1}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{g-1,\ n_t-g}$
$p = 2$	$g \geq 2$	$\left(\frac{n_t-g-1}{g-1}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{2(g-1),2(n_t-g-1)}$
$p \geq 1$	$g = 2$	$\left(\frac{n_t-p-1}{p}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{p,2\ n_t-p-1}$
$p \geq 1$	$g = 3$	$\left(\frac{n_t-p-2}{p}\right)\left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*}\right) \sim F_{2p,2(n_t-p-2)}$

Untuk kasus yang lain modifikasi dari Λ^* yang tepat diberikan oleh Bartlett dengan melalui - pendekatan terhadap distribusi Chi-Square.

Bila $\Sigma n_l = n$

Statistik Uji :

$$-\left[\left(n-1-\frac{(p+g)}{2}\right)\right]\ln\left[\left(\frac{|W|}{|B+W|}\right)\right]$$

Daerah Penolakan :

$$-\left(n-1-\frac{(p+g)}{2}\right)\ln\left(\frac{|W|}{|B+W|}\right) > \chi^2_{\alpha,\ p(g-1)}$$

- Manova Dengan Pengelompokan Dua Arah (The Two Way Classification)

Diasumsikan bahwa ukuran dicatat dari 2 faktor pengelompokan yang terdiri dari berbagai level.

Dalam analisa pengelompokan dua arah ini tidak ada blocking, kedua faktor tersebut mempunyai - pengaruh yang sama pentingnya, sehingga bisa mengakibatkan adanya suatu interaksi. Diasumsikan pula bahwa pengamatan pada kombinasi dari kondisi yang berbeda adalah independent satu dari yang lainnya.

Misalkan dua faktor pengelompokan tersebut masing-masing adalah faktor 1 dan faktor 2.

Sehingga terdapat g level faktor 1, b level fak tor 2 dan n pengamatan yang independen yang dapat dijumpai pada masing-masing kombinasi antara level g dan b untuk tiap variabel.

Bila terdapat pengamatan ke r pada level ke l dari faktor 1 dan level ke k dari faktor 2, maka model pengelompokan dua arah dengan effek yang tertentu untuk vektor response yang terdiri dari p komponen adalah :

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + (\tau\beta)_{lk} + e_{lkr} \qquad (2.16)$$

$l = 1, \ldots\ldots g$

$k = 1, \ldots\ldots b$

$r = 1, \ldots\ldots n$

Dimana :

μ = adalah vektor mean keseluruhan

τ_l = adalah vektor effek dari faktor 1 (kecepatan ke l)

β_k = adalah vektor effek dari faktor 2 (V_p/V_d ke k)

$(\tau\beta)_{lk}$ = adalah vektor interaksi antara faktor 1 dan faktor 2.

e_{lkr} = adalah vektor error yang identik, independent dan berdistribusi multi normal N_p $(0, \Sigma_p)$

Ekspektas dari persamaan (2.16) adalah :

$$E(X_{lkr}) = E(\mu + \tau_l + \beta_k + (\tau\beta)_{lk} + e_{lkr}$$

$$\mu_{lk} = \mu + \tau_l + \beta_k + (\tau\beta)_{lk} \qquad (2.17)$$

Nilai estimate dari persamaan (2.17) adalah :

$$\bar{X}_{lk} = \bar{X} + (\bar{X}_{l.} - \bar{X}) + (\bar{X}_{.k} - \bar{X}) + (\bar{X}_{lk} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})$$

Sehingga bila :

$$X_{lkr}-X_{lkr}+\bar{X}_{lk} = \bar{X}+(\bar{X}_{l.}-\bar{X})+(\bar{X}_{.k}-\bar{X})+(\bar{X}_{lk}-\bar{X}_{l.}-\bar{X}_{.k}+\bar{X})$$

$$X_{lkr}= \bar{X}+(\bar{X}_{l.}-\bar{X})+(\bar{X}_{.k}-\bar{X})+(\bar{X}_{lk}-\bar{X}_{l.}-\bar{X}_{.k}+\bar{X})+(X_{lkr}-\bar{X}_{lk}) \qquad \text{........ (2.18)}$$

Dengan demikian persamaan (2.18) adalah merupakan uraian dari hasil pengamatan yang sesuai dengan persamaan (2.16), dimana :

$\bar{X}$ = adalah rata-rata keseluruhan dari sampel

$\bar{X}_{l.}$ = adalah rata-rata untuk level ke l dari faktor 1

$\bar{X}_{.k}$ = adalah rata-rata untuk level ke k dari faktor 2

X_{lkr} = adalah nilai pengamatan

$(\bar{X}_{l.}-\bar{X})$ = adalah nilai estimate dari effek faktor 1

$(\bar{X}_{.k}-\bar{X})$ = adalah nilai estimate dari effek faktor 2

$(\bar{X}_{lk}-\bar{X}_{l.}-\bar{X}_{k.}+\bar{X})$ = adalah nilai estimate dari interaksi antara effek faktor 1 dan faktor 2

$(X_{lkr}-\bar{X}_{lk})$ = adalah residual

Jadi disini response terdiri dari p ukuran yang diulang n kali pada masing-masing kemungkinan kombinasi dari level faktor 1 dan faktor 2.

Jumlah cross product penyimpangan terhadap rata-rata dapat diuraikan menjadi :

$$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} \sum_{r=1}^{n} (X_{lkr} - \bar{X})(X_{lkr} - \bar{X})^1 = \sum_{l=1}^{g} bn(\bar{X}_{l.} - \bar{X})(\bar{X}_{l.} - \bar{X})^1$$
$$+ \sum_{k=1}^{b} bn\ (\bar{X}_{.k} - \bar{X})(\bar{X}_{.k} - \bar{X})^1$$
$$+ \sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} n\ (X_{lkr} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})(X_{lkr} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})^1$$
$$+ \sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} \sum_{r=1}^{n} (X_{lkr} - \bar{X}_{lk})(X_{lkr} - \bar{X}_{lk}) \qquad \text{.........(2.19)}$$

Dimana :

$\sum_{l=1}^{g} bn\ (\bar{X}_{l.} - \bar{X})(\bar{X}_{l.} - \bar{X})^1$ = adalah sum of square dan cross product dari effek faktor 1

$\sum_{k=1}^{b} gn\ (\bar{X}_{.k} - \bar{X})(\bar{X}_{.k} - \bar{X})^1$ = adalah sum of square dan cross product dari effek faktor 2

$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} n(\bar{X}_{lk} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})(\bar{X}_{lk} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})^1$

= adalah sum of square dan cross product dari interaksi antara faktor 1 dan faktor 2.

$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} \sum_{r=1}^{n} (X_{lkr} - \bar{X}_{lk})(X_{lkr} - \bar{X}_{lk})^1$

= adalah sum of square dan cross product dari residual

$$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(X_{lkr}-\bar{X})(X_{lkr}-\bar{X})^{1} =$$

adalah sum of square dan cross product dari total corrected.

Derajat bebas yang bersesuaian dengan persamaan (2.18) dapat diterangkan sebagai :

$$gbn-1 = (g-1)+(b-1)+(g-1)(b-1)+gb\ (n-1)$$

Tabel 2.2 Analisa Varians Untuk Multivariate Dengan Pengelompokan Dua Arah

Sumber Variasi	Matrik Sum Of Square Dan Crossproduct (SSP)	Derajat bebas (d.f)
Faktor 1	$SSP_{fak\ 1} = \sum_{l=1}^{g} bn(\bar{X}_{l.}-\bar{X})(\bar{X}_{l.}-\bar{X})^{1}$	g - 1
Faktor 2	$SSP_{fak\ 2} = \sum_{k=1}^{b} gn(\bar{X}_{.k}-\bar{X})(\bar{X}_{.k}-\bar{X})^{1}$	b - 1
Interaksi	$SSP_{int} = \sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b} n(\bar{X}_{lk}-\bar{X}_{l.}-\bar{X}_{.k}+\bar{X})(\bar{X}_{lk}-\bar{X}_{l.}-\bar{X}_{.k}+\bar{X})^{1}$	(g-1)(b-1)
Residual	$SSP_{res} = \sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(X_{lkr}-\bar{X}_{lk})(X_{lkr}-\bar{X}_{lk})^{1}$	gb (n-1)
Total Corrected	$SSP_{cor} = \sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{b}(X_{lkr}-\bar{X})(X_{lkr}-\bar{X})^{1}$	gbn - 1

Pengujian hipotesa effek interaksi :

$$Ho = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots\ldots = \gamma_{gb} = 0$$

H_1 = sekurang-kurangnya satu $(\tau\beta)_{lk} \neq 0$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|}$$

Daerah Penolakan :

$$-\left[gb\ (n-1) - \frac{p+1 - (g-1)(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{\alpha\,;(g-1)(b-1)}$$

Jika effek interaksi ada, maka model tidak additive. Dengan kata lain model dikatakan additive apabila effek dari faktor 1 dan faktor 2 dapat dianggap sebagai suatu jumlahan.

Pengujian hipotesa effek faktor 1 :

$H_0 = \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0$

H_1 = sekurang-kurangnya satu $\tau_l \neq 0$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fak\ 1} + SSP_{res}|}$$

Daerah Penolakan :

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{\alpha\,;\ (g-1)\ p}$$

Pengujian hipotesa effek faktor 2 :

$H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots\dots = \beta_b = 0$

H_1 = Sekurang-kurangnya satu $\beta_k \neq 0$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fak\ 2} + SSP_{res}|}$$

Daerah Penolakan :

$$-\left[gb\ (n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* > \chi^2_{\alpha}\ ;\ (b-1)\ p$$

Apabila hipotesa Ho diterima dari uji hipotesa - effek faktor 1 dan faktor 2, berarti secara statistik tidak terdapat effek dari faktor 1 dan faktor 2. Jika pada pengujian sebelumnya juga tidak diketemukan adanya interaksi atau dengan kata lain model adalah additive, maka vektor mean untuk seluruh group adalah sama.

2.4 Indek Percampuran Suatu Campuran Zat Padat

Apabila terdapat zat padat yang mempunyai sifat-sifat fisik tertentu dicampur pada kecepatan tertentu dan perbandingan yang tertentu antara volume partikel zat padat dan volume drum maka partikel tersebut sudah tidak dapat dibedakan lagi antara partikel yang satu dengan yang lain. Partikel tersebut bercampur secara acak sempurna.

Bila terdapat campuran p partikel zat padat dan pada setiap partikel terdapat jumlah sampel sebesar n_p dan fraksi sebesar C_p (p = 1, 2, ...), maka pada campur an zat padat tersebut berlaku suatu hubungan :

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n_z \qquad \ldots\ldots\ (2.20)$$

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_p = 1 \qquad \ldots\ldots\ (2.21)$$

Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah :

$$p\ (X_1 = n_1,\ X_2 = n_2,\ \ldots,\ X_p = n_p) =$$

$$= \frac{n_z\,!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_p!}\ C_1^{\ n_1}\ C_2^{\ n_2} \ldots C_p^{\ n_p}$$

Sehingga :

$$E\ (X_p) = n_z\ C_p$$

$$Var\ (X_p) = n_z\ C_p\ (1 - C_p)$$

$$Cov\ (X_t,\ X_p) = -\ n_z\ C_t\ C_p, \text{ untuk semua } t \text{ dan } t \neq p$$

Seandainya partikel zat padat itu telah bercampur secara acak sempurna, maka matrik kovariansi untuk setiap group ke m (m = 1,2, ...) adalah :

$$\Sigma_r = \frac{1}{n_z} \begin{bmatrix} C_1\ (1 - C_1) & -\ C_1\ C_2 & \ldots & -\ C_1\ C_p \\ -\ C_2\ C_1 & C_2(1 - C_2) & \ldots & -\ C_2\ C_p \\ \vdots & \vdots & & \\ -\ C_p\ C_1 & -\ C_p\ C_2 & \ldots & C_p(1-C_p) \end{bmatrix}$$

Disamping bercampur acak sempurna, setiap partikel campuran zat padat yang heterogen mempunyai kecenderungan untuk memisah, sehingga akan terbentuk suatu golongan-golongan partikel tertentu.

Apabila terdapat campuran p partikel zat padat dengan fraksi masing-masing sebesar C_p, maka matrik kovarian yang terbentuk untuk setiap group ke m, m = 1,2,... h

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} C_1\ (1-C_1) & -\ C_1\ C_2 & \ldots\ldots & -\ C_1\ C_p \\ -\ C_2\ C_1 & C_2\ (1-C_2) & \ldots\ldots & -\ C_2\ C_p \\ \vdots & \vdots & & \\ -\ C_p\ C_1 & C_p\ C_2 & \ldots\ldots & -\ C_p\ (1-C_p) \end{bmatrix}$$

Campuran yang homogen adalah suatu campuran yang komposisi bahannya seragam. Untuk mengetahui seberapa jauh kehomogenan suatu campuran dapat dilihat dari indek campurannya. Range indek campuran berkisar dari 0 sampai dengan 1. Indek campuran bernilai 0 apabila campuran tidak homogen sempurna, berarti pada campuran tersebut sama sekali tidak terdapat keseragaman partikel-partikel zat yang tercampur. Indek campuran bernilai 1 apabila campuran homogen sempurna.

Seandainya harga estimate matrik kovarians setiap group ke m adalah S_m (m = 1, 2, ... h), maka indek percampuran suatu campuran zat padat adalah :

$$M_m = \frac{\sqrt{\ln|\Sigma_s| - \ln|S_m|}}{\sqrt{\ln|\Sigma_s| - \ln|\Sigma_r|}} \qquad \ldots\ldots\ldots \; (2.22)$$

Dimana :

$|S_m|$ = Determinan dari estimate matrik kovarians untuk setiap group ke m.

$|\Sigma_r|$ = Determinan matrik kovarians apabila campuran zat padat bercampur secara acak sempurna

$|\Sigma_s|$ = Determinan matrik kovarians yang terbentuk sebagai akibat kecenderungan pemisahan partikel pada setiap campuran zat padat.

BAB III

ANALISA DATA

Data diperoleh dengan melakukan percobaan di laboratorium Latihan Penelitian Tehnik Kimia Fakultas Teknologi Industri jurusan Tehnik kimia Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
Adapun hasil percobaan dan cara kerja percobaan kami lampirkan pada Appendix.

3.1 Uji Kesamaan Matrik Kovarians

Langkah awal dari uji kesamaan matrik kovarians adalah mencari harga S_m untuk masing-masing group yang ke m. S_m adalah harga unbiased estimate matrik kovarians Σ untuk group yang ke m, m = 1, 2, ...18.
Bila X_{ip} adalah menunjukkan pengamatan ke i dan variabel ke p dengan jumlah pengamatan n_m, maka :

$$S_m = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots\cdots & S_{1p} \\ . & S_{22} & \cdots\cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & & S_{pp} \end{bmatrix}$$

$$S_{pp} = \frac{1}{n_m - 1} \sum_{i=1}^{n_m} (X_{ip} - \bar{X}_p)(X_{ip} - \bar{X}_p)^1 \quad \ldots\ldots(3.1)$$

$$S_{tp} = \frac{1}{n_m - 1} \sum_{i=1}^{n_m} (X_{ip} - \bar{X}_p)(X_{it} - \bar{X}_t)^1 \quad \ldots\ldots(3.2)$$

(Untuk setiap harga t, dan $t \neq p$)

Perbandingan V_p/V_d / Kecepatan	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21
25 rpm	$7,5757.10^{-7}$	$2,022.10^{-6}$	$2,616.10^{-6}$	$3,0852.10^{-6}$	$4,1905.10^{-6}$	$4,6932.10^{-6}$
38 rpm	$3,39.10^{-7}$	$4,913.10^{-7}$	$6,2926.10^{-7}$	$1,2885.10^{-6}$	$3,6013.10^{-6}$	$4,5205.10^{-6}$
60 rpm	$1,3336.10^{-7}$	$2,5224.10^{-7}$	$4,6436.10^{-7}$	$5,6499.10^{-7}$	$8,9037.10^{-7}$	$1,9603.10^{-6}$

Pool estimate dari matrik kovarians Σ adalah :

$$S = \frac{1}{\sum_{m=1}^{h} V_m} \sum_{m=1}^{h=18} V_m \, S_m \quad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0,0361 & 1,794.10^{-3} & -0,0359 \\ & 0,0134 & -0,0139 \\ & & 0,0519 \end{bmatrix}$$

Harga determinan matrik S = $2,4846.10^{-6}$

Pengujian Hipotesa :

$H_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots\ldots = \Sigma_h$

H_1 = sekurang-kurangnya ada satu nilai Σ_m yang ti_ dak sama

Statistik uji :

$$M = \sum_{m=1}^{h} V_m \ln |S| - \sum_{m=1}^{h} V_m \ln |S_m|$$

Bila harga $V_m = n_m - 1 = n$, maka :

$$M = (n \times h) \ln |S| - n \sum_{m=1}^{h} \ln |S_m|$$

$$= (9 \times 18)(-12,905) - 9\,(-246,571)$$

$$= 128,528$$

Bila harga p = 3, h = 18 dan n = 9, maka harga

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(h + 1)}{6\,(p + 1)\,hn}$$

$$C^{-1} = 0,8729$$

Sehingga $M\ C^{-1} = 112,1926$

Dengan mengambil $\alpha = 0,05$, nilai tabel distribusi $\chi^2_{0,05;102}$ sebesar 125,765.

Oleh karena harga $MC^{-1} < \chi^2_{0,05;102}$, maka hipotesa Ho diterima. Dengan demikian secara statistik harga matrik kovarians adalah sama pada seluruh group.

3.2 Manova Dengan Pengelompokan Dua Arah

Dari data hasil percobaan yang sudah disusun - sesuai dengan organisasi data yang ada pada Appendix, dapat diketahui bahwa pada faktor 1 terdapat 3 level terdiri atas kecepatan sebesar 25 rpm, 38 rpm dan 60 rpm. Pada faktor 2 terdapat 6 level masing-masing adalah perbandingan antara volume partikel dan volume drum (V_p / V_d) sebesar 0,06 ; 0,09 ; 0,12 ; 0,15; 0,18 ; 0,21.

Dengan demikian model Manova yang sesuai adalah :

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + \gamma_{lk} + e_{lkr} \qquad \ldots(3.4)$$

Persamaan (3.4) adalah sesuai dengan persamaan (2.16) dengan demikian bagian dari persamaan (2.16) telah - terpereinci pada bab yang terdahulu.

Uraian hasil pengamatan yang sesuai dengan model (3.4) adalah :

$$X_{lkr} = \bar{X} + (\bar{X}_{l.} - \bar{X}) + (\bar{X}_{.k} - \bar{X}) + (\bar{X}_{lkr} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{X})$$

$$+ (X_{lkr} - \bar{X}_{lk}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

Bagian-bagian persamaan (3.5) ini juga telah terperinci pada bab sebelumnya.

Sedangkan harga vektor mean yang didapat :

Kecepatan V_p/V_d / Kecepatan	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0
25 rpm	M 0,3236 P 0,3257 H 0,3507	M 0,2872 P 0,3389 H 0,3739	M 0,343 P 0,2886 H 0,3684	M 0,2880 P 0,3274 H 0,3838	M 0,3733 P 0,2699 H 0,3568	M 0, P 0, H 0,
38 rpm	M 0,3204 P 0,3397 H 0,3399	M 0,3336 P 0,3014 H 0,3650	M 0,3091 P 0,3156 H 0,3753	M 0,2975 P 0,3248 H 0,3777	M 0,3885 P 0,2724 H 0,3391	M 0, P 0, H 0,
60 rpm	M 0,3291 P 0,3342 H 0,3367	M 0,3462 P 0,3102 H 0,3436	M 0,3246 P 0,3099 H 0,3655	M 0,3061 P 0,3218 H 0,3721	M 0,3092 P 0,3194 P 0,3714	M 0, P 0, P 0,

Harga mean keseluruhan adalah :

$$\begin{bmatrix} M & 0{,}3224 \\ P & 0{,}3104 \\ H & 0{,}3672 \end{bmatrix}$$

Sesuai dengan model (2.19), maka :

Sum of Square dan crossproduct faktor 1 :

$$\sum_{l=1}^{g} bn\ (\bar{X}_{l.} - \bar{x})(\bar{X}_{l.} - \bar{x})^1$$

$$= \begin{bmatrix} 9{,}38.10^{-6} & -3{,}082.10^{-5} & -2{,}101.10^{-5} \\ & 1{,}032.10^{-4} & -7{,}1.10^{-5} \\ & & 4{,}904.10^{-5} \end{bmatrix}$$

Sum of Square dan crossproduct faktor 2 :

$$\sum_{k=1}^{b} gn\ (\bar{X}_{.k} - \bar{x})(\bar{X}_{.k} - \bar{x})^1$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}107.10^{-4} & -1{,}925.10^{-4} & -2{,}729.10^{-4} \\ & 2{,}933.10^{-4} & -1{,}087.10^{-4} \\ & & 3{,}550.10^{-4} \end{bmatrix}$$

Sum of Square dan crossproduct interaksi :

$$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} n\ (\bar{X}_{lk} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{x})(\bar{X}_{lk} - \bar{X}_{l.} - \bar{X}_{.k} + \bar{x})^1$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}350.10^{-4} & -2{,}391.10^{-4} & -1{,}701.10^{-4} \\ & 2{,}298.10^{-4} & 2{,}023.10^{-5} \\ & & 6{,}150.10^{-5} \end{bmatrix}$$

Sum of Square dan crossproduct residual :

$$\sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{b} \sum_{r=1}^{n} (X_{lkr} - \bar{X}_{lk})(X_{lkr} - \bar{X}_{lk})^1$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}03351 & 3{,}962.10^{-4} & -0{,}0339 \\ & 0{,}01246 & -0{,}01280 \\ & & 0{,}04675 \end{bmatrix}$$

Sum of Square dan crossproduct Total Covrected :

$$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(X_{lkr}-\bar{X})(X_{lkr}-\bar{X})^{1}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}03436 & -6{,}622.10^{-5} & -0{,}03436 \\ & 0{,}01308 & -0{,}01296 \\ & & 0{,}04721 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian tabel (3.3) Manova dengan Pengelompokan Dua Arah :

Sumber Variasi	Matrik Sum Of Square Dan Crossproduct	Derajat bebas
Faktor 1	$\begin{bmatrix} 9{,}38.10^{-6} & -3{,}082.10^{-5} & -2{,}101.10^{-5} \\ & 1{,}032.10^{-4} & -7{,}1.10^{-5} \\ & & 4{,}904.10^{-5} \end{bmatrix}$	2
Faktor 2	$\begin{bmatrix} 4{,}107.10^{-4} & -1{,}925.10^{-4} & -2{,}729.10^{-4} \\ & 2{,}933.10^{-4} & -1{,}087.10^{-4} \\ & & 3{,}550.10^{-4} \end{bmatrix}$	5
Interaksi	$\begin{bmatrix} 4{,}350.10^{-4} & -2{,}391.10^{-4} & -1{,}701.10^{-4} \\ & 2{,}298.10^{-4} & 2{,}023.10^{-5} \\ & & 6{,}150.10^{-5} \end{bmatrix}$	10
Residual	$\begin{bmatrix} 0{,}03351 & 3{,}962.10^{-4} & -0{,}0339 \\ & 0{,}01246 & -0{,}01280 \\ & & 0{,}04675 \end{bmatrix}$	162
Total Residual	$\begin{bmatrix} 0{,}03436 & -6{,}622.10^{-5} & -0{,}03436 \\ & 0{,}01308 & -0{,}01296 \\ & & 0{,}04721 \end{bmatrix}$	179

Pengujian hipotesa effek interaksi :

$$Ho = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots\ldots = \gamma_{gb} = 0$$

$$H1 = \text{sekurang-kurangnya satu } \gamma_{lk} \neq 0$$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SS_{residual}|}{|SS_{interaksi} + SS_{residual}|}$$

$$SS_{interaksi} + SS_{residual} = \begin{bmatrix} 0,03394 & 1,571.10^{-4} & -0,03407 \\ & 0,01269 & -0,01278 \\ & & 0,04681 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} 0,03351 & 3,962.10^{-4} & -1,701.10^{-4} \\ & 0,01246 & -0,01280 \\ & & 0,04675 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,03394 & 1,571.10^{-4} & -0,03407 \\ & 0,01269 & -0,01278 \\ & & 0,04681 \end{vmatrix}} = 0,9711$$

Dengan mengambil $\alpha = 5\ \%$

Harga $-\left[gb\ (n-1) - \frac{P+1\ -\ (g-1)(b-1)}{2} \right] \ln 0,9711 = 4,83.$

Harga tabel $\chi^2_{\alpha\ ;\ (g-1)(b-1)\ p} = 43,8$

Karena harga $-\left[gb(n-1) - \frac{P+1-(g-1)(b-1)}{2} \right] \ln 0,9711 < \chi^2_{\alpha\ ;(g-1)(b-1)\ p}$

maka hipotesa $Ho = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots = \gamma_{gb} = 0$ diterima.

Pengujian hipotesa effek interaksi :

$H_0 = (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \ldots\ldots = (\tau\beta)_{gb} = 0$

H_1 = sekurang-kurangnya satu $(\tau\beta)_{lk} \neq 0$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SS_{residual}|}{|SS_{interaksi} + SS_{residual}|}$$

$$SS_{interaksi} + SS_{residual} = \begin{bmatrix} 0{,}03394 & 1{,}571.10^{-4} & -0{,}03407 \\ & 0{,}01269 & -0{,}01278 \\ & & 0{,}04681 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}03351 & 3{,}962.10^{-4} & -1{,}701.10^{-4} \\ & 0{,}01246 & -0{,}01280 \\ & & 0{,}04675 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}03394 & 1{,}571.10^{-4} & -0{,}03407 \\ & 0{,}01269 & -0{,}01278 \\ & & 0{,}04681 \end{vmatrix}} = 0{,}9711$$

Dengan mengambil $\alpha = 5$ %

Harga $-\left[gb\ (n-1) - \frac{P+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] \ln 0{,}9711 = 4{,}83.$

Harga tabel $\chi^2_{\alpha\ ;\ (g-1)(b-1)\ p} = 43{,}8$

Karena harga $-\left[gb(n-1) - \frac{P+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] \ln 0{,}9711 < \chi^2_{\alpha\ ;\ (g-1)(b-1)\ p}$

maka hipotesa $H_0 = (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \ldots = (\tau\beta)_{gb} = 0$ diterima.

Dengan demikian secara Statistik tidak ditemukan interaksi antara faktor 1 dan faktor 2.

Sehingga model Manova akan menjadi :

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + e_{lkr}$$

Pengujian hipotesa effek faktor 1 :

$$H_0 = \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0$$

$$H_1 = \text{sekurang-kurangnya satu } \tau_l \neq 0$$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SS_{residual}|}{|SS_{faktor\ 1} + SS_{residual}|}$$

$$SS_{faktor\ 1} + SS_{residual} = \begin{bmatrix} 0,03352 & 3,654.10^{-4} & -0,03392 \\ & 0,01256 & -0,01287 \\ & & 0,04680 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} 0,03351 & 3,962.10^{-4} & -0,0339 \\ & 0,01246 & -0,01280 \\ & & 0,04675 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,03352 & 3,654.10^{-4} & -0,03392 \\ & 0,01256 & -0,01287 \\ & & 0,046680 \end{vmatrix}} = 0,940$$

Dengan mengambil $\alpha = 5\ \%$, maka :

$$\text{Harga } - \left[gb\ (n-1) - \frac{P+1 - (g-1)(n-1)}{2} \right] \ln 0,940 = 10,032$$

$$\text{Harga tabel } \chi^2_{\alpha;\ (g-1)\ p} = 12,6$$

Karena harga $-\left[gb\ (n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] \ln 0{,}940 < \chi^2_{\alpha,(g-1)p}$

maka hipotesa $H_0 = \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_l = 0$ diterima

Dengan demikian secara Statistik tidak terdapat ada - nya effek faktor 1.

Pengujian hipotesa effek faktor 2 :

$H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$

H_1 = sekurang-kurangnya ada satu $\beta_k \neq 0$

Statistik Uji :

$$\Lambda^* = \frac{|SS_{residual}|}{|SS_{faktor\ 2} + SS_{residual}|}$$

$$SS_{faktor\ 2} + SS_{residual} = \begin{bmatrix} 0{,}03392 & 2{,}037.10^{-4} & -0{,}03417 \\ & 0{,}01275 & -0{,}0129 \\ & & 0{,}04710 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}03351 & 3{,}962.10^{-4} & -0{,}0339 \\ & 0{,}01246 & -0{,}01280 \\ & & 0{,}04675 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}03392 & 2{,}037.10^{-4} & -0{,}03417 \\ & 0{,}01275 & -0{,}0129 \\ & & 0{,}04710 \end{vmatrix}} = 0{,}9512$$

Dengan mengambil α sebesar 5 %, maka :

Harga tabel $\chi^2_{\alpha;\ (b-1)\ p} = 25$

Harga $-\left[gb\ (n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2} \right] \ln 0{,}9512 = 8{,}13$

Karena harga $-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2} \right] \ln 0{,}9512 < \chi^2_{\alpha;(b-1)p}$,

maka hipotesa $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_b = 0$ adalah diterima.

Dengan demikian secara Statistik tidak terdapat adanya faktor 2.

Karena pada analisa ini tidak ditemukan adanya effek interaksi, effek faktor 1, maupun effek faktor 2, maka secara statistik dapat dikatakan bahwa model (3.4) akan menjadi :

$$X_{lkr} = \mu + e_{lkr}$$

Hal ini berarti bahwa secara statistik vektor mean dari seluruh group adalah sama.

3.3 Indek Percampuran Suatu Campuran Zat Padat

Dari uraian bab sebelumnya indek campuran zat padat adalah :

$$M_m = \frac{\sqrt{\ln |\Sigma_s| - \ln |S_m|}}{\sqrt{\ln |\Sigma_s| - \ln |\Sigma_r|}}$$

Sehingga apabila terdapat campuran p partikel zat padat yang heterogen dan masing-masing terdapat sampel sebesar n_p , juga fraksi sebesar C_p , maka :

$$\Sigma_r = \frac{1}{n_z} \begin{bmatrix} C_1(1-C_1) & -C_1\ C_2 & \dots & -C_1\ C_p \\ -C_2\ C_1 & C_2\ (1-C_2) & \dots & -C_2\ C_p \\ \vdots & & & \\ -C_p\ C_1 & -C_p\ C_2 & \dots & C_p(1-C_p) \end{bmatrix}$$

Seandainya pada group ke m terdapat pengamatan sebe - sar n_m maka C_p adalah fraksi rata-rata partikel ke p pada group ke m.

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} C_1(1-C_1) & -C_1\ C_2 & \dots\dots & -C_1\ C_p \\ -C_2\ C_1 & C_2(1-C_2) & \dots\dots & C_2\ C_p \\ \vdots & & & \\ -C_p\ C_1 & -C_p\ C_2 & & C_p(1-C_p) \end{bmatrix}$$

Harga n_z untuk tiap group yang ke m kami ambil sebe - sar 10 gram sedangkan harga Σ_r , Σ_s, determinan Σ_r determinan Σ_s juga harga indek campuran akan kami sajikan dalam tabel-tabel berikut ini.

Tabel 3.5 HARGA MATRIK Σ_r

Kecepatan \ Perbandingan V_p/V_d	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21
25 rpm	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0{,}2189 & -0{,}1053 & -0{,}1134 \\ & 0{,}2196 & -0{,}1142 \\ & & 0{,}2277 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}9}\begin{bmatrix} 0{,}2047 & -0{,}0973 & -0{,}1073 \\ & 0{,}2240 & -0{,}1267 \\ & & 0{,}2340 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10{,}05}\begin{bmatrix} 0{,}2253 & -0{,}0989 & -0{,}1263 \\ & 0{,}2053 & -0{,}106 \\ & & 0{,}2326 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10{,}1}\begin{bmatrix} 0{,}2054 & -0{,}0945 & -0{,}1105 \\ & 0{,}1971 & -0{,}0960 \\ & & 0{,}2295 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}9}\begin{bmatrix} 0{,}2339 & -0{,}1007 & -0{,}1331 \\ & 0{,}1971 & -0{,}0960 \\ & & 0{,}2295 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}8}\begin{bmatrix} 0{,}2222 & -0{,}0878 & -0{,}1341 \\ & 0{,}1942 & -0{,}1064 \\ & & 0{,}2408 \end{bmatrix}$
38 rpm	$\frac{1}{9{,}85}\begin{bmatrix} 0{,}2177 & -0{,}1088 & -0{,}1089 \\ & 0{,}2243 & -0{,}1154 \\ & & 0{,}2244 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}9}\begin{bmatrix} 0{,}2223 & -0{,}1005 & -0{,}1217 \\ & 0{,}2106 & -0{,}110 \\ & & 0{,}2317 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}85}\begin{bmatrix} 0{,}2135 & -0{,}0975 & -0{,}1161 \\ & 0{,}216 & -0{,}1184 \\ & & 0{,}2344 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0{,}209 & -0{,}0966 & -0{,}1123 \\ & +0{,}2193 & -0{,}1226 \\ & & 0{,}2350 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10{,}1}\begin{bmatrix} 0{,}2375 & -0{,}1058 & -0{,}1311 \\ & 0{,}1982 & -0{,}0934 \\ & & 0{,}2241 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0{,}2031 & -0{,}0909 & -0{,}1120 \\ & 0{,}2179 & -0{,}1268 \\ & & 0{,}2391 \end{bmatrix}$
60 rpm	$\frac{1}{10{,}05}\begin{bmatrix} 0{,}2208 & -0{,}1099 & -0{,}1108 \\ & 0{,}2225 & -0{,}1125 \\ & & 0{,}2233 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10{,}1}\begin{bmatrix} 0{,}2263 & -0{,}1073 & -0{,}1189 \\ & 0{,}2140 & -0{,}1065 \\ & & 0{,}2255 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0{,}2192 & -0{,}1005 & -0{,}1186 \\ & 0{,}2138 & -0{,}1132 \\ & & 0{,}2319 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0{,}2124 & -0{,}0996 & -0{,}1126 \\ & 0{,}2196 & -0{,}1199 \\ & & 0{,}2326 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10{,}1}\begin{bmatrix} 0{,}2136 & -0{,}0987 & -0{,}1148 \\ & 0{,}2174 & -0{,}1186 \\ & & 0{,}2334 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{9{,}9}\begin{bmatrix} 0{,}2127 & -0{,}0926 & -0{,}1199 \\ & 0{,}2109 & -0{,}1181 \\ & & 0{,}2381 \end{bmatrix}$

Tabel 3.8 Harga Indek Campuran

Perbandingan V_p/V_d / Kecepatan	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21
25 rpm	0,654	0,617	0,590	0,568	0,545	0,539
38 rpm	0,670	0,626	0,614	0,604	0,597	0,571
60 rpm	0,757	0,736	0,692	0,665	0,642	0,610

Karena harga indek percampuran dari campuran - zat padat yang dihitung lebih besar dari 0,5 , dengan demikian campuran zat padat yang dihasilkan sudah dapat dikategorikan kedalam suatu campuran homogen, secara kimiawi.

BAB IV

PEMBAHASAN

Apabila terdapat p partikel zat padat heterogen yang akan dicampur dengan kondisi tertentu yaitu 3 level faktor kecepatan yang terdiri dari kecepatan 25 rpm, 38 rpm dan 60 rpm, 6 level faktor perbandingan V_p / V_d masing-masing sebesar 0,06 ; 0,09 ; 0,12;0,15 0,18 dan 0,21, maka dengan menggunakan uji kesamaan matrik kovarians dan dengan mengambil α sebesar 5 % akan terlihat bahwa :

$H_o = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots\ldots = \Sigma_h$ adalah diterima, karena $MC^{-1} < \chi^2_{\alpha;\frac{1}{2}(h-1)p(p+1)}$ sehingga campuran zat padat tersebut mempunyai matrik kovarians yang sama untuk setiap group ke m, m = 1,2 ...... h.

Dengan menggunakan Manova pengelompokan dua arah yang mempunyai model :

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + \gamma_{lk} + e_{lkr}$$

akan terlihat juga bahwa :

- $H_o = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots\ldots = \gamma_{gb} = 0$ diterima,

  karena $-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* < \chi^2_{\alpha;(g-1)(b-1)p}$.

  Sehingga secara statistik tidak ditemukan interaksi antara faktor 1 dan faktor 2, dan model manova akan menjadi :

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + e_{lkr}$$

- Ho = $\tau_1 = \tau_2 = \ldots\ldots = \tau_g = 0$ diterima,

 karena $-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* < \chi^2_{\alpha\,;(g-1)p}$.

- Ho = $\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_b = 0$ diterima

 karena $-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2}\right] \ln \Lambda^* < \chi^2_{\alpha\,;(b-1)p}$.

Sehingga secara statistik tidak ditemukan effek faktor 1 dan effek faktor 2 pada model

$$X_{lkr} = \mu + \tau_l + \beta_k + e_{lkr}$$

Dengan demikian model manova akan menjadi : $X_{lkr} = \mu + e_{lkr}$, dan vektor mean untuk seluruh group adalah sama.

Karena matrik kovarians Σ dan vektor mean adalah sama untuk setiap group ke m, maka campuran zat padat tersebut berada dalam keadaan homogen.

Untuk mengetahui seberapa jauh kehomogenan suatu campuran dapat dilihat dari indek percampurannya. Indek percampuran yang telah dihitung adalah lebih besar dari 0,5 dan lebih kecil dari 0,8. Sehingga campuran zat padat yang terbentuk dapat dikatakan sebagai campuran homogen yang kurang sempurna. Hal ini semata-mata hanya disebabkan karena letak zat padat me rah dan zat padat hijau dalam rotary drum, sehingga-partikel zat padat merah mempunyai kecenderungan hubungan yang kuat dengan partikel zat padat hijau. Dan keadaan ini dapat digambarkan sebagai berikut :

Zat padat merah	Zat padat hijau	Zat padat hijau

Gambar 4.1 Keadaan rotary drum sebelum diputar dengan kecepatan - tertentu

Kecenderungan hubungan yang kuat pada kedua zat padat tersebut terjadi karena :

- Di dalam rotary drum tidak terdapat alat pencampuran yang lainnya (Ball Mill). Sehingga keterbatasan-alat ini menyebabkan :
- Zat padat merah mempunyai fraksi yang relatif besar dan berangsur-angsur mengecil pada setiap sekat rotary drum.
- Zat padat hijau cenderung mempunyai fraksi yang relatif kecil dan berangsur-angsur membesar pada setiap sekat rotary drum.

  Sehingga kedua zat padat tersebut mempunyai korelasi yang cukup berarti.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Walaupun dengan hanya memakai suatu alat rotary drum, dapat dihasilkan suatu campuran yang homogen dari partikel zat padat multi komponen.

Dengan menggunakan suatu metoda analisa Multivariate dapat ditunjukkan bahwa keadaan homogen tersebut dicapai pada suatu kondisi operasi kecepatan dari 25 rpm sampai dengan 60 rpm dan perbandingan antara volume partikel zat padat dengan volume rotary drum / alat (V_p / V_d) dari 0,06 sampai dengan 0,21.

Dengan demikian kondisi operasi ini berlaku bagi setiap campuran zat padat dengan berbagai sifat fisik.

Untuk mendapatkan campuran yang lebih homogen dengan indek percampuran yang lebih besar tentulah diperlukan suatu alat yang lebih sempurna dari pada dengan hanya memakai suatu alat rotary drum, sehingga partikel-partikel zat padat tersebut benar-benar dalam keadaan acak sempurna dan tidak berkelompok menurut golongan sifat-sifat fisiknya.

Dari hasil analisa indek percampuran dapat disimpulkan bahwa semakin besar kecepatan atau putarannya, indek percampuran yang dihasilkan akan semakin besar pula. Dan semakin besar V_p / V_d , indek percampuran yang dihasilkan akan semakin kecil.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini indek percampuran paling tinggi yang dapat dicapai adalah sebesar 0,757. Untuk bisa memproduksi suatu campuran yang mendekati homogen sempurna yang sangat diperlukan dalam beberapa bidang, misalnya pharmasi, pertanian dan industri-industri lainnya, tentu saja tidak cukup hanya memperhatikan kondisi operasinya saja, tetapi dalam perancangan alatnya perlu juga diperhitungkan penambahan beberapa alat pencampur yang sesuai dengan kondisi operasi yang telah ditentukan.
Disamping itu, mengingat teori tentang percampuran partikel zat padat multikomponen masih belum banyak dan proses percampuran partikel zat padat cukup penting dalam beberapa bidang, maka penelitian tentang percampuran zat padat multi komponen sangat layak untuk diteruskan.

Dari hasil penelitian yang kami sajikan ini, untuk penelitian selanjutnya kami sarankan untuk mencari waktu tinggal yang dibutuhkan dalam mencapai indek percampuran yang diinginkan pada rpm tertentu.

APPENDIX A

PERCOBAAN

A-1 Tujuan Percobaan

Untuk membuktikan kebenaran hipotesa pen - campuran zat padat dengan memakai rotary drum.

A-2 Dasar Percobaan

Dasar percobaan yang dilakukan adalah pen-campuran zat padat dengan variabel yang ditentu-kan, sehingga dapat diketahui hubungan antara va riabel tersebut dengan derajat pencampuran.

A-3 Alat-Alat Percobaan

1. Seperangkat rotary drum, berukuran :
   - Diameter drum 15 cm
   - Panjang drum 38 cm
2. Sekat pemisah
3. Timbangan tehnis
4. Gelas arloji
5. Stop watch
6. Gelas ukur
7. Jangka Sorong
8. Motor penggerak yang dilengkapi dengan trans-formator

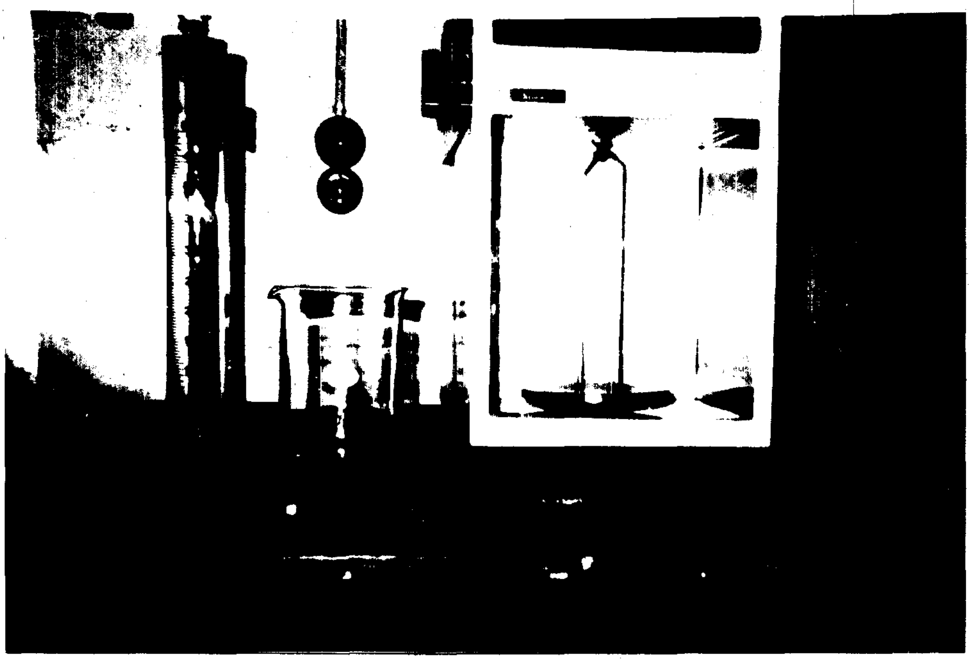
A-4 Bahan Yang Digunakan

Partikel dengan spesifikasi sebagai berikut :

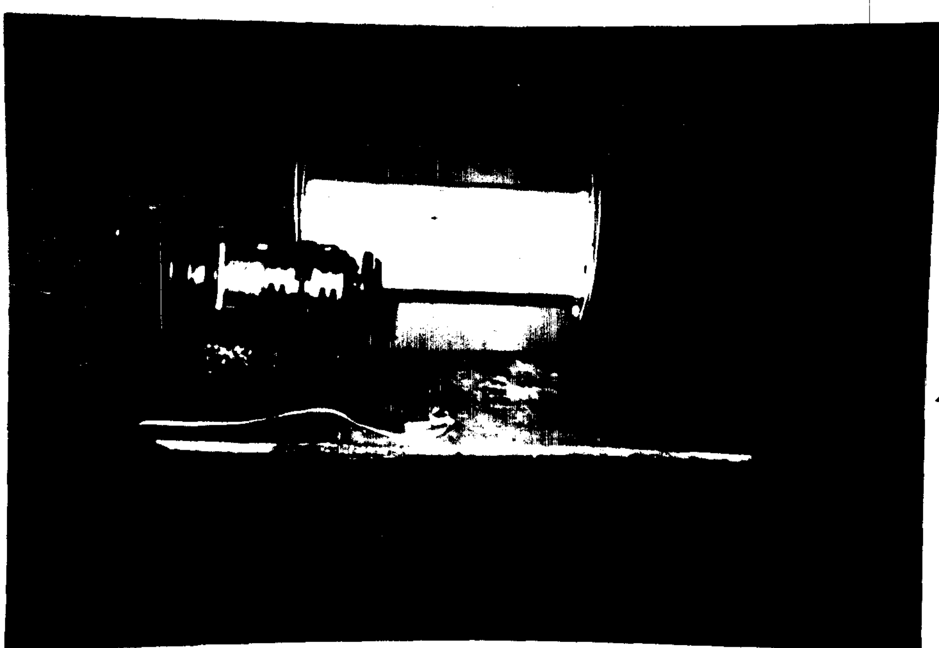
- Diameter = 0,35 cm
- True density = 1,2195 gr/cc
- Bulk density = 0,7353 gr/cc
- Warna = merah, putih dan hijau

A-5 Variabel Percobaan

- Kecepataan putaran dari rotary drum = 25 rpm, 36 rpm dan 60 rpm
- Perbandingan volume campuran komponen dengan volume rotary drum V_p/V_d = 0,06 ; 0,09 ; 0,12; 0,15 ; 0,18 ; 0,21



Gambar A-3.1



Gambar A-3.2

APPENDIX B

CARA KERJA PERCOBAAN

Langkah-lanhkah yang dilakukan dalam percobaan adalah :

B-1 Persiapan percobaan

1. Menyusun peralatan
2. Menghitung density partikel, baik true density maupun bulk density
3. Mengukur diameter partikel dengan jangka sorong

B-2 Cara Kerja Percobaan

1. Menimbang masing-masing komponen, dengan massa 100 gr (V_p / V_d = 0,06)
2. Mengisi rotary drum dengan 3 komponen tersebut, yang dipisahkan dengan dua penyekat
3. Motor dijalankan dengan menekan skakelar, sehingga rotary drum berputar dengan putaran 25 rpm
4. Setelah 5 menit motor dimatikan, kemudian rotary drum dibuka dan disekat menjadi 10 bagian untuk pengambilan sampel
5. Memisahkan masing-masing komponen dalam tiap-tiap sampel yang diambil

6. Menimbang masing-masing komponen yang telah dipisahkan tersebut untuk mengetahui fraksinya
7. Prosedur 1 sampai dengan 6 di ulang untuk massa yang lain masing-masing sebesar 150 gr, 200 gr, 250 gr, 300 gr dan 350 gr (berarti V_p / V_d masing-masing adalah 0,09 ; 0,12 ; 0,15 ; 0,18 ; 0,21)
8. Mengganti pul 1, untuk mengubah variabel putaran
9. Prosedur 1 sampai dengan 8 di ulang untuk variabel putaran yang lain.

APPENDIX C

DATA SETELAH DI SUSUN KEDALAM ORGANISASI DATA YANG SESUAI

Perbandingan V_p/V_d / Kecepatan	0,06			0,09			0,12		
	Merah	Putih	Hijau	Merah	Putih	Hijau	Merah	Putih	Hijau
25 rpm	0,704	0,125	0,171	0,656	0,238	0,106	0,684	0,152	0,164
	0,617	0,269	0,114	0,567	0,318	0,115	0,615	0,256	0,129
	0,526	0,337	0,137	0,408	0,371	0,221	0,531	0,259	0,21
	0,373	0,435	0,192	0,371	0,384	0,245	0,428	0,366	0,206
	0,28	0,507	0,213	0,219	0,512	0,269	0,321	0,437	0,242
	0,162	0,468	0,37	0,191	0,468	0,341	0,213	0,528	0,259
	0,177	0,353	0,47	0,144	0,466	0,39	0,207	0,398	0,395
	0,148	0,381	0,471	0,109	0,292	0,599	0,187	0,182	0,631
	0,141	0,264	0,595	0,104	0,198	0,698	0,132	0,148	0,72
	0,108	0,118	0,774	0,103	0,142	0,755	0,112	0,16	0,728
38 rpm	0,677	0,213	0,11	0,747	0,117	0,136	0,642	0,252	0,106
	0,596	0,287	0,117	0,658	0,189	0,153	0,555	0,293	0,152
	0,496	0,377	0,127	0,593	0,228	0,179	0,464	0,369	0,167
	0,373	0,467	0,16	0,382	0,41	0,208	0,392	0,371	0,237
	0,243	0,5	0,237	0,236	0,394	0,37	0,221	0,484	0,295
	0,211	0,52	0,289	0,137	0,502	0,261	0,217	0,472	0,311
	0,159	0,40	0,441	0,202	0,376	0,422	0,202	0,366	0,432
	0,162	0,313	0,525	0,164	0,291	0,545	0,164	0,253	0,583
	0,141	0,182	0,677	0,113	0,247	0,64	0,125	0,179	0,696
	0,146	0,138	0,716	0,104	0,16	0,736	0,109	0,117	0,774
60 rpm	0,566	0,315	0,119	0,667	0,2075	0,1255	0,598	0,243	0,159
	0,515	0,325	0,160	0,622	0,2465	0,1315	0,532	0,266	0,202
	0,391	0,435	0,174	0,53	0,3235	0,1465	0,469	0,325	0,206
	0,327	0,457	0,216	0,399	0,4435	0,1575	0,421	0,367	0,212
	0,331	0,346	0,323	0,367	0,4695	0,1635	0,308	0,492	0,20
	0,324	0,293	0,383	0,233	0,4145	0,3525	0,275	0,471	0,254
	0,256	0,365	0,379	0,225	0,3665	0,4085	0,214	0,356	0,43
	o,221	0,297	0,482	0,17	0,2995	0,5305	0,193	0,259	0,548
	0,176	0,264	0,56	0,132	0,2015	0,6665	0,128	0,186	0,686
	0,184	0,245	0,571	0,117	0,1295	0,7535	0,108	0,134	0,758

APPENDIX D

ASUMSI MULTIVARIATE NORMAL

Bila terdapat p random variabel kontinyu yang mempunyai pdf f(x) dan $p \geq 2$, maka untuk membuktikan kebenaran asumsi bahwa error adalah berdistribusi normal yang mempunyai mean 0 dan varians konstan sebesar Σ dan mempunyai p d f :

$$f(x) = \frac{1}{(2\ \ )^{p/2}\ \ ^{\frac{1}{2}}} \exp. \left[- \tfrac{1}{2}\, x'\, \Sigma^{-1}\, x \right]$$

diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mencari nilai normal standart untuk tiap variabel p, $Z_{pr} = \dfrac{X_{1kr} - \bar{X}_{1k}}{\sqrt{S_{pp}}}$, p =1,2,3 dan r = 1,2,...n_r

2. Mencari kuadrat jarak dari Z_{pr} ,

   $d^2_r = (X_r - \bar{x})^1\ S^{-1}\ (X_r - \bar{x})$

   dimana : S^{-1} adalah suatu matrik kovarian berukuran p x p

   : $(X_r - \bar{X})$ adalah suatu vektor mean dari normal standart dan berukuran p x 1

3. Mencari order jarak dari yang terkecil hingga yang terbesar, $d^2_{(1)} \leq d^2_{(2)} \leq d^2_{(3)} \quad \ldots\ldots \leq d^2_{(r)}$

4. Menghitung percentile dari distribusi Chi Square dengan derajat bebas p, $\chi^2_p \left(\dfrac{r - \frac{1}{2}}{n_r} \right)$

5. Membentuk plot diagram pasangan

$$\left[d^2_{(r)} \; ; \; \chi^2_p \left(\frac{r - \frac{1}{2}}{n_r} \right) \right]$$

Bila plot diagram menyerupai suatu garis lurus, maka tidak terjadi penyimpangan terhadap asumsi bahwa error berdistribusi Normal.

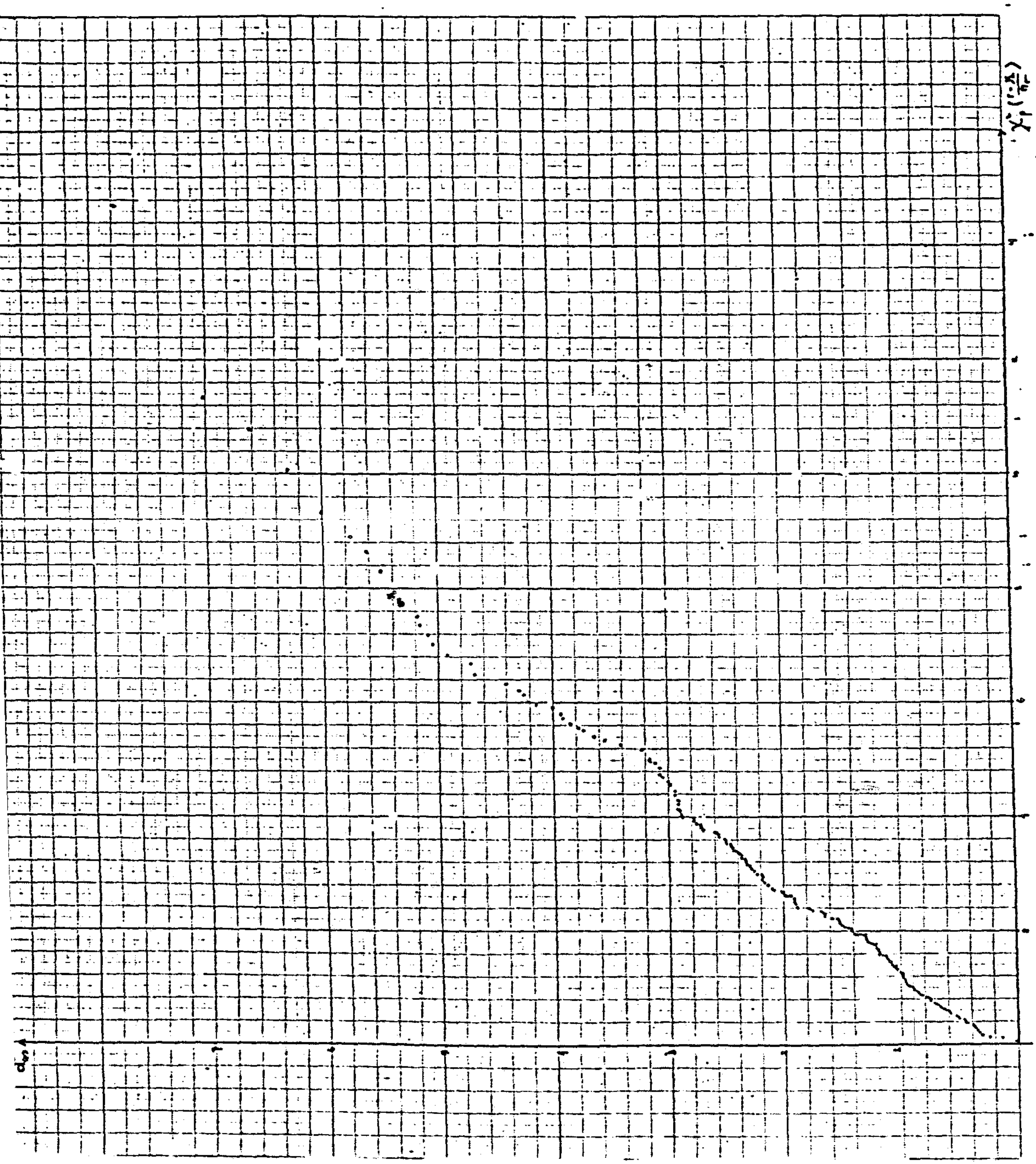
Z_{1r}	Z_{2r}	Z_{3r}	$d^2_{(r)}$	$\chi^2_p \frac{(r - \frac{1}{2})}{n_r}$
1,986	-1,756	-1,040	0,0119	0,0403
1,533	-0,515	-0,939	0,1451	0,1004
1,059	0,072	-0,789	0,2536	0,1413
0,262	0,916	-0,697	0,3151	0,1783
-0,222	1,537	-0,605	0,3187	0,216 .
-0,836	1,201	0,085	0,3476	0,2465
-0,810	0,468	0,524	0,3696	0,2764
-0,909	0,451	0,528	0,3754	0,3068
-0,946	-0,558	1,073	0,4027	0,3368
-1,118	-1,816	1,859	0,4397	0,3650
+1,921	-0,870	-1,169	0,4503	0,3905
1,457	-0,180	-1,138	0,4541	0,4165
0,629	0,277	-0,673	0,4715	0,4420
0,436	0,389	-0,567	0,5176	0,468
-0,355	1,492	-0,462	0,5189	0,4940
-0,501	1,113	-0,145	0,5382	0,5195
-0,746	1,096	0,070	0,5758	0,5455
-0,928	-0,404	0,988	0,5904	0,57100
-0,954	-1,215	1,423	0,6206	0,5957
-0,959	-1,697	1,673	0,6411	0,6186
1,776	-1,178	-1,052	0,6652	0,6420
1,416	-0,281	-0,898	0,6721	0,6650
0,979	-0,255	-0,696	0,6897	0,6883
0,443	0,667	-0,713	0,7053	0,7117
-0,115	1,279	-0,555	0,7203	0,7346
-0,677	2,064	-0,481	0,7469	0,7580
-0,708	0,943	0,117	0,7484	0,7810
-0,812	-0,919	1,154	0,7648	0,8043
-1,099	-1,109	1,544	0,7877	0,8273
-1,203	-1,212	1,580	0,8212	0,8507

Z_{1r}	Z_{2r}	Z_{3r}	$d^2_{(r)}$	$\chi^2_p \frac{(r-\frac{1}{2})}{n_r}$
1,907	-1,038	-1,080	0,8390	0,8736
1,470	-0,366	-1,053	0,8478	0,897
0,746	-0,012	-0,623	0,8596	0,9204
-0,077	1,066	-0,478	0,8654	0,9433
-0,311	1,479	-0,491	0,8928	0,9667
-0,494	0,971	-0,078	0,8951	0,9896
-0,645	0,583	0,247	0,9013	1,0130
-0,759	-0,191	0,739	0,9086	1,0360
-0,895	-1,081	1,305	0,9167	1,0593
-0,942	-1,409	1,512	0,9326	1,0823
1,681	-0,594	-1,115	0,9355	1,1057
1,509	-0,396	-1,071	0,9397	1,1290
1,155	0,113	-1,031	0,9411	1,1520
0,514	0,647	-0,763	0,9419	1,1754
0,024	1,372	-0,720	0,9717	1,1983
-0,340	1,553	-0,504	0,9747	1,2230
-0,840	0,380	0,515	0,9845	1,2485
-0,970	-0,456	1,051	1,0005	1,2745
-1,335	-1,085	1,679	1,0252	1,3000
-1,397	-1,534	1,960	1,0280	1,326
1,329	0,294	-1,271	1,0321	1,3520
0,918	0,320	-0,959	1,0577	1,3775
0,777	0,604	-0,937	1,0656	1,4035
0,355	1,242	-0,933	1,0737	1,429
-0,020	1,622	-0,810	1,0898	1,4550
-0,410	0,499	0,117	1,0995	1,4805
-0,593	-0,361	0,683	1,1096	1,5065
-0,619	-0,999	1,031	1,1103	1,5320
-0,780	-1,568	1,457	1,1237	1,558
-0,957	-1,603	1,624	1,1552	1,5840
1,847	-1,092	-1,001	1,1671	1,6095
1,425	-0,454	-0,970	1,1814	1,6355
0,904	0,322	-0,926	1,2173	1,661
0,264	1,097	-0,781	1,2233	1,687
-0,413	1,554	-0,443	1,2351	1,7125
-0,580	1,382	-0,215	1,2497	1,7385
-0,799	0,520	0,409	1,2656	1,7640
-0,835	-0,230	0,822	1,2666	1,790
-0,893	-1,360	1,446	1,2734	1,8160
-0,919	-1,739	1,661	1,2879	1,8415

Z_{1r}	Z_{2r}	Z_{3r}	$d^2_{(r)}$	$\chi^2_p \frac{(r - \frac{1}{2})}{n_r}$
1,892	-1,167	-1,010	1,2951	1,8675
1,429	-0,547	-0,936	1,3046	1,893
1,351	-0,555	-0,865	1,3359	1,9190
0,252	0,928	-0,694	1,3824	1,9445
-0,503	1,721	-0,461	1,4008	1,9705
-0,508	0,790	-0,018	1,4077	1,9960
-0,685	0,635	0,334	1,4151	2,022
-0,883	-0,098	0,786	1,4457	2,0480
-1,149	-0,478	1,204	1,4855	2,0735
-1,196	-1,228	1,625	1,5046	2,099
1,734	-0,548	-1,183	1,5165	2,125
1,281	-0,195	-0,981	1,5200	2,1510
0,807	0,460	-0,915	1,5216	2,1765
0,432	0,478	-0,607	1,5279	2,2025
-0,459	1,452	-0,353	1,5873	2,2280
-0,480	1,348	-0,282	1,6507	2,254
-558	0,435	0,249	1,6523	2,280
-0,756	-0,540	0,912	1,6561	2,3055
-0,959	-1,178	1,409	1,6835	2,3315
-1,042	-1,712	1,751	1,7471	2,357
1,862	-0,938	-1,092	1,7783	2,3895
1,513	-0,481	-1,031	1,8914	2,4278
1,216	-0,136	-0,956	1,8955	2,4667
0,107	1,097	-0,649	1,9003	2,5050
-0,404	1,416	-0,381	1,9358	2,544
-0,622	1,873	0,010	1,9464	2,5830
-0,831	1,157	0,111	1,9889	2,6213
-0,883	-0,645	1,073	2,0099	2,6602
-0,919	-1,395	1,486	2,0309	2,6985
-1,039	-1,947	1,429	2,0968	2,7374
1,523	-0,590	-1,006	2,1015	2,7760
1,424	-0,038	-0,984	2,1529	2,8147
0,877	0,419	-0,976	2,1784	2,8530
0,378	0,988	-0,844	2,1952	2,892
0,133	1,195	-0,743	2,1962	2,9310
-0,503	0,919	-0,066	2,3067	2,9693
-0,508	0,428	0,188	2,3535	3,008
-0,779	-0,521	0,900	2,3639	3,0465
-1,180	-1,193	1,581	2,3912	3,0855
-1,367	-1,607	1,950	2,3989	3,1238

Z_{1r}	Z_{2r}	Z_{3r}	$d^2_{(r)}$	$\chi^2_p \frac{(r-\frac{1}{2})}{n_r}$
1,675	-0,143	-1,017	2,4223	3,1627
0,909	0,150	-0,885	2,4283	3,2010
0,461	0,762	-0,802	2,4343	3,24
-0,002	0,745	-0,393	2,4686	3,2790
-0,096	0,728	-0,323	2,4691	3,3173
-0,200	0,305	-0,011	2,4959	3,3562
-0,481	0,141	0,310	2,5297	3,3945
-0,575	-0,712	0,824	2,5394	3,4335
-0,804	-0,600	0,960	2,5636	3,4718
-0,887	-1,376	1,338	2,5733	3,5107
1,234	-0,166	-0,956	2,6129	3,5490
0,968	-0,079	-0,776	2,6139	3,588
0,322	0,869	-0,715	2,6201	3,6270
-0,010	1,059	-0,530	2,6676	3,6652
-0,011	0,102	-0,060	2,6755	3,7042
-0,027	-0,266	0,186	2,6958	3,7425
-0,381	-0,355	0,203	2,7078	3,7815
-0,563	-0,321	0,638	2,7227	3,8198
-0,797	-0,605	0,981	2,7248	3,8587
-0,756	-0,769	1,029	2,7559	3,8970
1,671	-0,885	-0,958	2,7757	3,936
1,436	-0,549	-0,932	2,7943	3,9750
0,957	0,115	-0,866	2,8863	4,0133
0,275	1,149	-0,817	2,8885	4,0522
0,108	1,373	-0,791	2,9022	4,0905
-0,590	0,899	0,039	2,9172	4,1499
-0,631	0,485	0,285	2,9214	4,2284
-0,918	-0,092	0,821	2,9223	4,3083
-1,115	-0,937	1,418	2,9417	4,3868
-1,194	-1,558	1,801	2,9446	4,4667
1,424	-0,577	-0,907	2,9821	4,5466
1,080	-0,378	-0,727	3,0159	4,6250
0,752	0,130	-0,718	3,0586	4,7049
0,502	0,492	-0,674	3,0707	4,7834
-0,086	1,570	-0,701	3,0831	4,8633
-0,258	1,389	-0,490	3,1242	4,9417
-0,576	0,397	0,283	3,1531	5,0216
-0,685	-0,439	0,802	3,1661	5,1001
-1,024	-1,068	1,408	3,2169	5,18
-1,128	-1,516	1,724	3,4237	5,2599

z_{1r}	z_{2r}	z_{3r}	$d^2_{(r)}$	$\chi^2_p \frac{(r-\frac{1}{2})}{n_r}$
1,369	-0,464	-0,918	3,5725	5,3384
0,874	+0,260	-0,870	3,6536	5,4182
0,510	0,674	-0,774	3,7320	5,4967
0,411	0,838	-0,774	3,7894	5,5766
0,291	0,864	-0,686	3,8638	5,6551
-0,323	0,786	-0,128	3,9155	5,7350
-0,438	0,278	0,228	3,9291	5,8134
-0,818	-0,671	1,032	4,1648	5,8933
-0,891	-1,274	1,401	4,2125	5,9732
-0,985	-1,291	1,489	4,2348	6,0517
1,582	-0,753	-0,981	4,2541	6,1316
0,947	0,333	-0,964	4,3040	6,2100
0,676	0,410	-0,792	4,4464	6,3374
0,395	0,609	-0,481	4,6771	6,5090
-0,001	0,574	-0,305	4,7070	6,6837
-0,444	0,790	-0,085	4,9187	6,8553
-0,449	0,272	0,227	5,0547	7,03
-0,730	-0,340	0,776	5,0893	7,2047
-0,933	-0,762	1,162	5,1565	7,3763
-1,043	-1,133	1,443	5,1804	7,5510
1,959	-0,760	-1,265	5,3282	7,7226
1,485	-0,062	-1,221	5,3829	7,9825
0,865	0,110	-0,786	5,4932	8,3213
0,141	0,533	-0,391	5,6086	8,6662
-0,416	1,404	-0,364	5,7642	9,005
-0,546	1,171	-0,136	6,1073	9,35
-0,567	0,671	0,137	6,2963	10,078
-0,864	-0,648	1,059	6,6211	10,793
-1,020	-0,898	1,318	7,2044	11,351
-1,036	-1,519	1,648	7,7823	14,725



APPENDIX E

ASUMSI BAHWA ERROR ADALAH INDEPENDENT

Bila terdapat pengamatan p komponen/variabel - ingin dibuktikan bahwa errornya adalah independent,maka untuk membuktikannya digunakan autokorelasi Multivariate.

Vektor pengamatan ke t dari $(e_{1t}, e_{2t}, e_{3t}, \ldots\ldots e_{nt})$ dipandang sebagai vektor E_t, dan vektor pengamatan ke t+k dari $(e_{1(t+k)}, e_{2(t+k)}, e_{3(t+k)}, \ldots\ldots e_{n(t+k)})$ dipandang juga sebagai vektor E_{t+k} . Sehingga auto korelasinya akan berbentuk :

$$r_k = (E_t - \bar{E})^1 \; S^{-1}_{E_tE_t} \; (E_{t+k} - \bar{E})$$

Dimana :

$S_{E_tE_t}$ = adalah matrik kovarians e_1, e_2 dan e_3 yang berukuran p x p

$\bar{E}$ = adalah matrik mean keseluruhan dari e_1 , e_2 dan e_3 yang berukuran p x 1

e_1	e_2	e_3
0.333	-0.064	-0.269
0.246	-0.023	-0.223
0.155	0.053	-0.208
0.083	0.055	-0.138
-0.088	0.168	-0.080
-0.092	0.156	-0.064
-0.107	0.050	0.057
-0.145	-0.063	0.208
-0.184	-0.137	0.321
-0.200	-0.199	0.199
0.357	-0.109	-0.249
0.291	-0.056	-0.235
0.233	-0.016	-0.218
0.021	0.127	-0.148
-0.078	0.164	-0.087
-0.119	0.217	0.002
-0.160	0.134	0.025
-0.169	-0.075	0.244
-0.177	-0.162	0.338
-0.199	-0.226	0.325
0.293	-0.068	-0.229
0.273	-0.004	-0.224
0.169	0.049	-0.222
0.072	0.115	-0.192
0.025	0.139	-0.169
-0.097	0.107	-0.015
-0.097	0.050	0.043
-0.150	-0.060	0.205
-0.227	-0.138	0.360
-0.262	-0.186	0.444
0.322	-0.017	-0.231
0.175	0.017	-0.201
0.089	0.088	-0.183
0.000	0.084	-0.090
-0.018	0.086	-0.074
-0.038	0.035	-0.002
-0.092	0.016	0.070
-0.110	-0.083	0.188
-0.154	-0.070	0.219
-0.170	-0.160	0.304

e_1	e_2	e_3
0.237	-0.019	-0.218
0.186	-0.009	-0.177
0.062	0.101	-0.163
-0.002	0.123	-0.121
0.002	0.012	-0.014
-0.005	-0.041	0.046
-0.073	0.031	0.042
-0.108	-0.037	0.145
-0.153	-0.070	0.223
-0.145	-0.089	0.234
0.321	-0.103	-0.218
0.276	-0.0[illegible]4	-0.212
0.184	0.013	-0.197
0.053	0.133	-0.186
0.021	0.159	-0.180
-0.113	0.104	0.009
-0.121	0.056	0.065
-0.176	-0.011	0.187
-0.214	-0.109	0.323
-0.229	-0.181	0.410
0.273	-0.067	-0.207
0.207	-0.044	-0.163
0.144	0.015	-0.160
0.096	0.057	-0.154
-0.017	0.182	-0.166
-0.050	0.161	-0.111
-0.111	0.046	0.065
-0.132	-0.051	0.182
-0.197	-0.124	0.320
-0.217	-0.176	0.393
0.263	-0.054	-0.209
0.168	0.030	-0.198
0.098	0.078	-0.176
0.079	0.097	-0.176
0.056	0.100	-0.156
-0.062	0.091	-0.029
-0.084	0.032	0.052
-0.157	-0.078	0.235
-0.171	-0.148	0.319
-0.189	-0.150	0.339

e_1	e_2	e_3
0.381	-0.204	-0.180
0.294	-0.060	-0.237
0.203	0.008	-0.214
0.050	0.106	-0.159
-0.043	0.178	-0.138
-0.161	0.139	0.019
-0.156	0.054	0.119
-0.175	0.052	0.120
-0.182	-0.065	0.244
-0.215	-0.211	0.423
0.369	-0.101	-0.266
0.280	-0.021	-0.259
0.121	0.032	-0.153
0.084	0.045	-0.129
-0.068	0.173	-0.105
-0.096	0.129	-0.033
-0.143	0.127	0.016
-0.178	-0.047	0.225
-0.183	-0.141	0.324
-0.184	-0.197	0.381
0.341	-0.137	-0.204
0.272	-0.033	-0.239
0.188	-0.030	-0.158
0.085	0.077	-0.162
-0.022	0.148	-0.126
-0.130	0.239	-0.109
-0.136	0.109	0.027
-0.156	-0.107	0.263
-0.211	-0.141	0.352
-0.231	-0.129	0.360
0.366	-0.120	-0.246
0.282	-0.042	-0.240
0.143	-0.001	-0.142
-0.015	0.124	-0.109
-0.060	0.172	-0.112
-0.095	0.113	-0.018
-0.124	0.068	0.056
-0.146	-0.022	0.168
-0.172	-0.125	0.297
-0.181	-0.163	0.344

e_1	e_2	e_3
0.323	-0.069	-0.254
0.290	-0.046	-0.244
0.222	0.013	-0.235
0.099	0.075	-0.174
0.005	0.159	-0.164
-0.065	0.180	-0.115
-0.161	0.044	0.117
-0.186	-0.053	0.239
-0.256	-0.126	0.382
-0.268	-0.178	0.446
0.255	0.034	-0.289
0.176	0.037	-0.213
0.149	0.070	-0.218
0.068	0.144	-0.212
-0.004	0.188	-0.184
-0.079	0.052	0.027
-0.114	-0.042	0.156
-0.119	-0.116	0.235
-0.150	-0.182	0.332
-0.184	-0.186	0.370
0.355	-0.127	-0.228
0.274	-0.053	-0.221
0.174	0.037	-0.211
0.051	0.127	-0.178
-0.079	0.180	-0.101
-0.111	0.160	-0.049
-0.153	0.060	0.093
-0.160	-0.027	0.187
-0.171	-0.158	0.329
-0.176	-0.202	0.378
0.363	-0.135	-0.230
0.274	-0.063	-0.213
0.259	-0.064	-0.197
0.048	0.108	-0.158
-0.097	0.200	-0.105
-0.098	0.092	0.004
-0.132	0.074	0.076
-0.170	-0.011	0.179
-0.221	-0.055	0.274
-0.230	-0.142	0.370

e_1	e_2	e_3
0.304	-0.087	-0.219
0.182	0.039	-0.223
0.130	0.048	-0.180
0.076	0.071	-0.109
0.000	0.067	-0.069
-0.085	0.092	-0.019
-0.086	0.032	0.052
-0.140	-0.039	0.177
-0.179	-0.088	0.265
-0.200	-0.131	0.329
0.376	-0.088	-0.288
0.285	-0.007	-0.278
0.166	0.013	-0.179
0.027	0.062	-0.089
-0.080	0.163	-0.083
-0.105	0.136	-0.031
-0.109	0.078	0.031
-0.166	-0.075	0.241
-0.196	-0.104	0.300
-0.199	-0.176	0.375

Sehingga

$r_2 = 0,1484$